EXERCICE N°4 :	40'	7 points	

Soit la suite (I_n) définie sur IN par : $I_0=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$ et $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx$, $n\geq 1$.

1°) Montrer que la suite (I_n) est convergente .

2°) Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t)=\sqrt{1+t}$.

a) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, on a : $0\leq f'(t)\leq\frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x\in[0,1]$, on a : $0\leq f(x)-1\leq\frac{1}{2}x$.

c) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) a) À l'aide d'une intégration par partie, Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, $(2n+3)I_n+2nI_{n-1}=4\sqrt{2}$.

b) Calculer I_0 et I_1.

4°) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g(x)=x\sqrt{1+x}$ .On désigne par (C_g) et (C_f).

Les courbes des fonctions g et f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer ,en ua , $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_g) , (C_f) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

b) On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Calculer $\mathcal{V}$ le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_g) au tour de l'axe $(O,\vec{i})$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn